第 14 講　図形と方程式(4)

1 [1]　a, b を正の実数とする．実数 x に対し，次の命題が成り立つような点 $(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ．

$$|x-a|<b \Longrightarrow |x-b|<a$$

[2]　不等式 $x^2+y^2+4x\leqq 0$ の表す領域を A，不等式 $x^2+y^2-2y\leqq 0$ を表す領域を B とする．次の問いに答えよ．

(1)　領域 A の境界線と領域 B の境界線の共有点の座標を求めよ．

(2)　和集合 $A\cup B$ を座標平面上に図示せよ．

(3)　θ は $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であり，$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$ を満たす実数とする．和集合 $A\cup B$ の面積を θ を用いて表せ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　次の連立不等式の表す領域を D とする．

$$x^2+y^2\leqq 25,\ (y-2x-10)(y+x+5)\leqq 0$$

(1)　領域 D を図示せよ．

(2)　点 $(x,\ y)$ がこの領域 D を動くとき，$x+2y$ の最大値 M と最小値 m を求めよ．また，M，m を与える D の点を求めよ．

(3)　a を実数とする．点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$ax+y$ が点 $(-3,\ 4)$ で最大値をとるような a の値の範囲を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　斜辺の長さが a, 面積が b である直角三角形が存在するとき, 座標平面上の点 $(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第14講　図形と方程式(4)

連立不等式 $3x+2y\leqq 22$，$x+4y\leqq 24$，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ の表す座標平面上の領域を D とする．点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$ax+y$ $(a>0)$ の最大値は

$0<a\leqq\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ のとき $\boxed{ウ}$　　$\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}<a\leqq\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$ のとき $\boxed{カ}\,a+\boxed{キ}$

$\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}<a$ のとき $\dfrac{\boxed{クケ}}{\boxed{コ}}a$　である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第14講　図形と方程式(4)

1 [1]　a，bを正の実数とする．実数xに対し，次の命題が成り立つような点(a, b)の存在範囲を図示せよ．

$$|x-a|<b \implies |x-b|<a$$

$|x-a|<b$より　$-b<x-a<b$　　よって　$a-b<x<a+b$

$|x-b|<a$より　$-a<x-b<a$　　よって　$b-a<x<a+b$

よって与えられた命題は　$a-b<x<a+b \implies b-a<x<a+b$

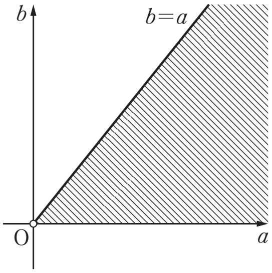
と同値である．したがって，これが真であるための条件は，

$a>0$，$b>0$であることから

$b-a \leqq a-b$　　つまり　$b \leqq a$　である．

したがって，求める領域は右図斜線部分

（境界は直線$b=a$上の$a>0$の部分のみ含み，他は含まない）．



1 [2]　不等式$x^2+y^2+4x \leqq 0$の表す領域をA，不等式$x^2+y^2-2y \leqq 0$を表す領域をBとする．次の問いに答えよ．

(1)　領域Aの境界線と領域Bの境界線の共有点の座標を求めよ．

(2)　和集合$A \cup B$を座標平面上に図示せよ．

(3)　θは$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$であり，$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$を満たす実数とする．和集合$A \cup B$の面積をθを用いて表せ．

(1)　A，Bの境界を表す方程式はそれぞれ　$x^2+y^2+4x=0$ ……①，$x^2+y^2-2y=0$ ……②

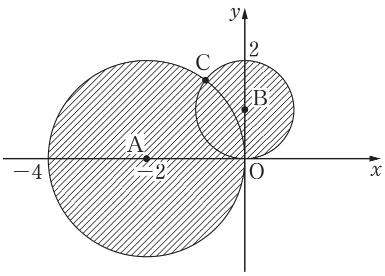
①－②より　$y=-2x$　これを①に代入して　$x^2+4x^2+4x=0$　　$x=0,\ -\dfrac{4}{5}$

よって求める共有点の座標は　$\mathbf{(0,\ 0)}$，$\left(-\dfrac{4}{5},\ \dfrac{8}{5}\right)$

(2)　点の座標を$\mathrm{A}(-2,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1)$，$\mathrm{C}\left(-\dfrac{4}{5},\ \dfrac{8}{5}\right)$

とすると

和集合$A \cup B$は右図斜線部分（境界含む）．



(3)　線分ACの傾きは　$\dfrac{\frac{8}{5}}{-\frac{4}{5}+2}=\dfrac{8}{-4+10}=\dfrac{4}{3}$　　線分BCの傾きは　$\dfrac{1-\frac{8}{5}}{\frac{4}{5}}=-\dfrac{3}{4}$

よって　$\mathrm{AC} \perp \mathrm{BC}$　より　BC，ACはそれぞれ円A，円Bの接線である．

また，$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$　より　$\tan\theta=\dfrac{4}{3}$　これは　ACの傾きと等しい．

ゆえに　$\angle\mathrm{OAC}=\theta$　より　$\angle\mathrm{OBC}=\pi-\theta$

したがって求める面積は

$$\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot(2\pi-\theta)+\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\{2\pi-(\pi-\theta)\}+(\text{四角形 OACB})=\boldsymbol{\frac{9}{2}\pi-\frac{3}{2}\theta+2}$$

2　次の連立不等式の表す領域を D とする．

$$x^2+y^2\leqq25,\ (y-2x-10)(y+x+5)\leqq0$$

(1)　領域 D を図示せよ．

(2)　点 $(x,\ y)$ がこの領域 D を動くとき，$x+2y$ の最大値 M と最小値 m を求めよ．また，M，m を与える D の点を求めよ．

(3)　a を実数とする．点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$ax+y$ が点 $(-3,\ 4)$ で最大値をとるような a の値の範囲を求めよ．

(1)　$(y-2x-10)(y+x+5)\leqq0$　より

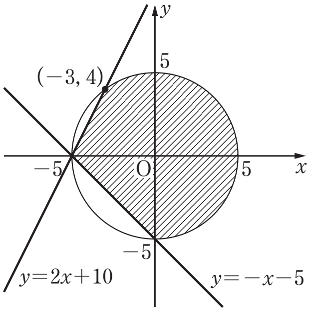
$\begin{cases} y\geqq2x+10 \\ y\leqq-x-5 \end{cases}$　または　$\begin{cases} y\leqq2x+10 \\ y\geqq-x-5 \end{cases}$

円 C：$x^2+y^2=25$ と

直線 $y=2x+10$ の交点は　$(-5,\ 0)$，$(-3,\ 4)$

$y=-x-5$ の交点は　$(-5,\ 0)$，$(0,\ -5)$

よって領域 D は右図斜線部分（境界含む）．



(2)　$x+2y=k$ とおき，$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{k}{2}$（傾き $-\dfrac{1}{2}$ の直線）……①　が領域 D と共有点をもつときの y 切片 $\dfrac{k}{2}$ の最大，最小を考える．

最大となるのは①が円 C と第一象限で接するとき．

よって　$\dfrac{|-k|}{\sqrt{1+4}}=5$　より　$k=5\sqrt{5}$

このとき①は　$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$　　これと垂直で C の中心 O を通る直線 $y=2x$ との交点を求めて，k は $\boldsymbol{(x,\ y)=(\sqrt{5},\ 2\sqrt{5})}$ のとき　**最大値** $\boldsymbol{M=5\sqrt{5}}$ をとる．

最小となるのは①が点 $(0,\ -5)$ を通るとき．

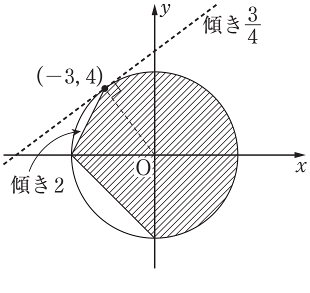
よって　$\boldsymbol{(x,\ y)=(0,\ -5)}$ のとき　**最小値** $\boldsymbol{m=-10}$

(3)　$ax+y=l$ とおき，直線 $y=-ax+l$　……②　の傾き $-a$ について考える．

点 $(-3,\ 4)$ における C の接線の傾きは　$\dfrac{3}{4}$

よって　$\dfrac{3}{4}\leqq-a\leqq2$　であればよい．

したがって　$\boldsymbol{-2\leqq a\leqq-\frac{3}{4}}$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 斜辺の長さが a，面積が b である直角三角形が存在するとき，座標平面上の点 $(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ．

直角をはさむ 2 辺の長さを x，y とすると，

$x^2+y^2=a^2$ ……①　　$\dfrac{1}{2}xy=b$ ……②

②より　$xy=2b$

①より　$(x+y)^2-2xy=a^2$　　$(x+y)^2=4b+a^2$　　$x+y>0$ より　$x+y=\sqrt{a^2+4b}$

よって　x，y は t の 2 次方程式　$t^2-\sqrt{a^2+4b}\,t+2b=0$　の 2 解である．

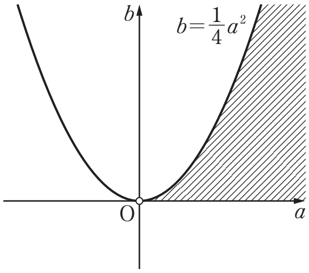
$f(t)=t^2-\sqrt{a^2+4b}\,t+2b$　とおくと，$f(0)=2b>0$，軸 $t=\dfrac{\sqrt{a^2+4b}}{2}>0$

よって　$f(t)=0$ が正の 2 実数解をもつ条件は　判別式 $D\geqq 0$

$a^2+4b-4\cdot 2b\geqq 0$　　$b\leqq\dfrac{1}{4}a^2$

これと　$a>0$，$b>0$ より　求める範囲は右図斜線部分

（境界は直線 $b=\dfrac{1}{4}a^2$ 上を含むが，a 軸上および原点は含まない）．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

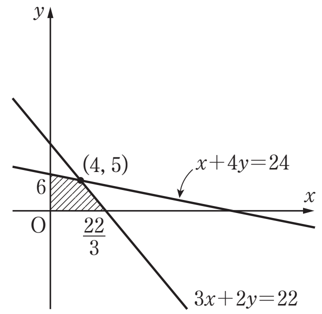
第14講　図形と方程式(4)

連立不等式 $3x+2y \leqq 22$，$x+4y \leqq 24$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ の表す座標平面上の領域を D とする．点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$ax+y$ $(a>0)$ の最大値は

$0<a \leqq \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ のとき $\boxed{ウ}$　　$\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}<a \leqq \dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$ のとき $\boxed{カ}a+\boxed{キ}$

$\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}<a$ のとき $\dfrac{\boxed{クケ}}{\boxed{コ}}a$　である．

直線 $3x+2y=22$ と $x+4y=24$ の交点は　$(4,\ 5)$
よって領域 D は右図斜線部分（境界含む）.



$ax+y=k$ とおき，直線 $y=-ax+k$（傾き $-a$）が
領域 D と共有点をもつときの y 切片 k の最大値を考える．

(i)　$-\dfrac{1}{4} \leqq -a$　つまり　$0<a \leqq \mathbf{\dfrac{1}{4}}$ のとき

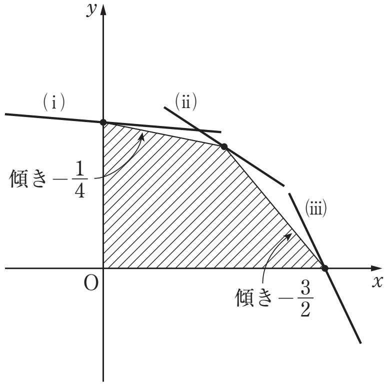
$(x,\ y)=(0,\ 6)$ で最大値　$k=\mathbf{6}$ をとる．

(ii)　$-\dfrac{3}{2} \leqq -a < -\dfrac{1}{4}$　つまり　$\mathbf{\dfrac{1}{4}}<a \leqq \mathbf{\dfrac{3}{2}}$ のとき

$(x,\ y)=(4,\ 5)$ で最大値　$k=\mathbf{4}a+\mathbf{5}$ をとる．

(iii)　$-a<-\dfrac{3}{2}$　つまり　$\mathbf{\dfrac{3}{2}}<a$ のとき

$(x,\ y)=\left(\dfrac{22}{3},\ 0\right)$ で最大値　$k=\mathbf{\dfrac{22}{3}}a$ をとる．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。